Exponentielle d'une matrice

2 janvier 2021

1. Exponentielle d'une matrice
2. Exponentielle d'une matrice diagonalisable
3. Exponentielle d'une matrice et décomposition de Dunford
4. Exponentielle d'une matrice et Réduction de Jordan
5. Applications

1. Exponentielle d'une matrice.

Définition 1.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice. La série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}A^n$ est normalement convergente sur toute partie compacte, sa somme est appelée **l'exponentielle de** A.

$$exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}A^n.$$

$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + ... + \frac{1}{n!}A^n + ...$$

Proposition 1.2

(1) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $e^A = P(A)$.
(2) Si A et B sont deux matrices qui commutent, alors $e^{A+B} = e^A.e^B$.
Mais en général : $e^{A+B} \neq e^A.e^B$.
(3) Si A et B sont deux matrices semblables, c.à.d $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$,
alors $e^B = P^{-1}.e^A.P$.
(4) Si $A = 0$ alors $e^A = I_n$
(5) Si A est inversible , alors e^A l'est aussi, et on

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

(6) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $(exp(A))^t = exp(A^t)$.
(7) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$exp(Tr(A)) = det(exp(A)).$$

$$Sp(exp(A)) = exp(Sp(A)).$$

Exponentielle d'une matrice diagonale

Proposition 1.3 (Exponentielle d'une matrice diagonale)

Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale,

alors,

$$exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Application :

$$exp(0_n) =$$

$$exp(I_n) = .$$

Exponentielle d'une matrice nilpotente

Proposition 1.4 (Exponentielle d'une matrice nilpotente)

Soit N une matrice nilpotente d'indice de nilpotence p.

$$exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N^k}{k!} = I_n + N + ... + \frac{1}{(p-1)!} N^{p-1} + 0...$$

$\forall k < p :$ $\quad N^k = 0.$

Exemple 1.5

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

Vérifier que la matrice A est nilpotente puis déterminer $exp(A)$.

2. Exponentielle d'une matrice diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable
il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale.
donc $A = PDP^{-1}$.
Donc $exp(A) = P.exp(D).P^{-1}$

$$exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & .0 & . & 0 \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

2. Exponentielle d'une matrice diagonalisable

Proposition 2.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors
A est diagonalisable si et seulement si $exp(A)$ est diagonalisable.

Exemple 2.2

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

(1) Prouver que la matrice$A$ est diagonalisable.
(2) Déterminer $exp(A)$

3. Exponentielle d'une matrice et décomposition de Dunford

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice admettant une décomposition de Dunford
c.à.d il existe un couple (Δ, N) tel que
. $A = \Delta + N$
. Δ diagonalisable et N nilpotente
. $\Delta N = N\Delta$
On sait que $exp(A) = exp(\Delta + N) = exp(\Delta).exp(N)$
avec :

$$exp(N) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!} = I_n + N + ... + \frac{1}{(p-1)!} N^{p-1}$$

où p est l'indice de nilpotence de N,
$exp(\Delta) = P.exp(D).P^{-1}$ où D est une matrice diagonale

4. Exponentielle d'une matrice et Réduction de Jordan

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé
donc il existe une matrice inversible P telle que :

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & .. & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & . & : \\ : & . & . & 0 \\ 0 & .. & 0 & J_{\lambda_r} \end{pmatrix},$$

où J_{λ_i} sont des blocs de Jordan.
c.à.d

$$J_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & .. & 0 \\ 0 & . & . & : \\ : & . & . & 1 \\ 0 & .. & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$ valeur propre de A.

4. Exponentielle d'une matrice et Réduction de Jordan

Donc

$$exp(A) = exp(PJP^{-1}) = P.\begin{pmatrix} exp(J_{\lambda_1}) & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & : \\ : & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & exp(J_{\lambda_r}) \end{pmatrix}.P^{-1}$$

L'exponentielle d'une matrice de Jordan est facile à calculer.
En effet, pour une telle matrice J on a : $J = D + N$ telle que :

$$\begin{cases} D & est & diagonale \\ N & & nilptente \\ DN = & & ND \end{cases}$$

Donc

$$exp(A) = exp(P(D+N)P^{-1}) = P.exp(D)exp(N)P^{-1}$$

où $exp(D)$ est une matrice diagonale et
$exp(N)$ est un polynôme simple en N.

4. Exponentielle d'une matrice et Réduction de Jordan

Exercice 4.1

On considère

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

(1) Déterminer les valeurs propres de A.
(2) Montrer que A n'est pas diagonalisable.
(3) Déterminer la réduite de Jordan de A.
(4) Préciser la base de Jordan ainsi que la matrice de passage.
(5) Soit

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

4. Exponentielle d'une matrice et Réduction de Jordan

Exercice 4.2

Vérifier que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

(6) Déterminer $exp(A)$.
(7) Déterminer le polynôme minimal de A.
(8) En déduire l'expression de A^{-1}.

5. Application : système différentiel linéaire

Propsition 5.1

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\frac{d}{dt}(exp(tA^{)}) = A.exp(tA) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Théorème 5.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors le système différentiel

$$\begin{cases} X' &= AX \\ X(0) &= X_0 \end{cases}$$

admet une solution unique définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$X(t) = exp(tA)X_0.$$

5. Application : système différentiel linéaire

Système différentiel linéaire

Soit à résoudre le système différentiel linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1' = & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \quad \vdots & \\ x_n' = & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

où $a_{ij} \in \mathbb{R}$
Il s'agit de trouver n fonctions $x_1, \ldots, x_n$ de classe C_1 vérifiant le système précédent.

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et $A = (a_{ij})_{ij=1\ldots n}$.

Le système s'écrit

$$X'(t) = A.X(t).$$

1er cas : A est diagonalisable

Donc il existe une matrice inversible P telle

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & .0 & . & 0 \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} X'(t) = A.X(t) & \iff X'(t) = PDP^{-1}.X(t) \\ & \iff P^{-1}.X'(t). = D.(P^{-1}.X(t)) \end{cases}$$

On pose $U(t) = P^{-1}.X(t) \quad \Longrightarrow \quad U'(t) = P^{-1}.X'(t).$
l'équation (1) est équivalente à $U'(t) = D.U(t)$.
qui se ramène simplement aux équations suivantes :

$$\begin{cases} U_1' = & \lambda_1 U_1 \\ \vdots & \\ U_n' = & \lambda_n U_1 \end{cases}$$

1er cas : A est diagonalisable

Donc

$$\begin{cases} U_1 = & A_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots & \\ U_n = & A_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$$

où $A_1, ..., A_n$ des constantes.

Conclusion : les solution du système initial sont :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P. \begin{pmatrix} A_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ A_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

Remarque : Il n'y a pas lieu de calculer p^{-1}.

Si $v_1, ..., v_n$ sont des vecteurs propres associés à $\lambda_1, ..., \lambda_n$, alors

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A_1 e^{\lambda_1 t}.v_1 + ... + A_n e^{\lambda_n t}.v_n$$

Exemple 5.1

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x'(t) = & x(t) - 3y(t) + 3z(t) \\ y'(t) = & 3x(t) - 5y(t) + 3z(t) \\ z'(t) = & 6x(t) - 6y(t) + 4z(t) \end{cases}$$

Exemple 2 :

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x'(t) = & -3x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = & -7x(t) + 5y(t) - 3z(t) \\ z'(t) = & -6x(t) + 6y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

MERCI POUR VOTRE ATTENTION